CAPÍTULO 6

CRITERIOS PARA EXAMINAR LAS FÓRMULAS

Cuando se trabaja con relativos o índices elementales se cumplen en éstos ciertas propiedades que son muy importantes y que deben mantenerse al agrupar varios de ellos en un sólo indicador sintético. La importancia de este capítulo es que fija las limitaciones del indicador que se utilice para fines de un mejor análisis.

A continuación se describen las principales características que debe poseer un Índice Compuesto, para lo cual con fines académicos nos referiremos a los índices de precios de Laspeyres y Paasche que son los más utilizados y los Índices de Fisher, Geométrico y de Tournqvist-Theil.

6.1 REVERSIBILIDAD TEMPORAL (INVERTIBILIDAD)

Dados dos períodos, 0 y 1, el índice de precios del período 1 con base en el período 0, multiplicado por el índice de precios del período 0 con base en el período 1, debe ser igual a 1.

En el caso de las fórmulas más conocidas como Laspeyres y Paasche, esta prueba se cumpliría si las cantidades y los precios, que son factores utilizados como ponderadores de los índices de precios y de cantidades, respectivamente, fueran los mismos. En general, cuando las cantidades consumidas no varían, cualquiera de estas fórmulas cumpliría la propiedad de reversibilidad temporal, como se muestra posteriormente.

En el caso de la fórmula del índice geométrico se demuestra matemáticamente que para que se cumpla esta propiedad de reversibilidad temporal las proporciones de gasto de los bienes consumidos deben mantenerse iguales. Este supuesto no necesariamente se cumple según estudios realizados.

Ejemplo:

A nivel individual, supongamos con respecto al período "t", el precio del período “o” es el 50%. Con respecto al período “o” el precio del período “t” es el 200%. El producto de estos dos índices da 1.

$$\frac{P_t}{P_o} x \frac{P_o}{P_t} = \frac{100}{50} x \frac{50}{100} = 1$$

ÍNDICES DE LASPEYRES Y PAASCHE[1/]

Esta prueba no la cumplen las fórmulas de Laspeyres y Paasche

$$_{\cdot L}IP_t^o x_{\cdot L}IP_o^t = \frac{\sum P_t Q_o}{\sum P_o Q_o} x \frac{\sum P_o Q_t}{\sum P_t Q_t} \neq 1$$

$$_{\cdot P}IP_t^o x_{\cdot P}IP_o^t = \frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_o Q_t} x \frac{\sum P_o Q_o}{\sum P_t Q_o} \neq 1$$

ÍNDICES DE FISHER

La fórmula que plantea Fisher si la cumple

$$_{\cdot F}IP_t^o x_{\cdot F}IP_o^t = \sqrt{\frac{\sum P_t Q_o}{\sum P_o Q_o} x \frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_o Q_t}} x \sqrt{\frac{\sum P_o Q_t}{\sum P_t Q_t} x \frac{\sum P_o Q_o}{\sum P_t Q_o}} = 1$$

[1/] En este capitulo para fines de la demostración no se considerarán los subíndices “i”.

Trabajando con los índices de Precios, Índices Geométricos, así como los de Tournqvist-Theil, se tendrían los siguientes:

ÍNDICES GEOMÉTRICOS

El índice calculado por el método de la Media Geométrica es de la forma:

$$_{\cdot G}IP_t^o = II\left(\frac{P_t}{P_o}\right)^{\alpha_i}$$

Aplicando logaritmos a ambos miembros:

$$Log\left(IP_t^o\right) = \left\{\sum\left[\alpha_i \times Log\left(\frac{P_t}{P_o}\right)\right]\right\}$$

Donde:

α_i es el ponderador usado para obtener el índice de Laspeyres, que es un caso especial de la Media Aritmética ponderada,

Donde:

$$\alpha_i = \frac{P_{oi}Q_{oi}}{\Sigma P_{oi}Q_{oi}}$$

La propiedad de invertibilidad indica que:

$$\boxed{_{\cdot G}IP_1^o x_{\cdot G}IP_0^1 = 1}$$

Donde:

$$_{\cdot G}IP_t^o = \Pi\left(\frac{P_{ti}}{P_{oi}}\right)^{\left(\frac{P_{oi}Q_{oi}}{\sum P_{oi}Q_{oi}}\right)}$$

$$_{.G}IP_o^t = \prod\left(\frac{P_{oi}}{P_{ti}}\right)^{\left(\frac{P_{ti}Q_{ti}}{\sum P_{ti}Q_{ti}}\right)}$$

De modo que:

$$_{.G}IP_t^o x_{.G}IP_o^t = {}_{.G}IP_t^o = \prod\left(\frac{P_{ti}}{P_{oi}}\right)^{\left(\frac{P_{oi}Q_{oi}}{\sum P_{oi}Q_{oi}}\right)} x\prod\left(\frac{P_{oi}}{P_{ti}}\right)^{\left(\frac{P_{ti}Q_{ti}}{\sum P_{ti}Q_{ti}}\right)}$$

Pero si la proporción de los gastos permaneciera sin variación, es decir:

$$\left(\frac{P_{oi}Q_{oi}}{\sum P_{oi}Q_{oi}} = \frac{P_{ti}Q_{ti}}{\sum P_{ti}Q_{ti}}\right)$$

Luego:

$$IP_t^o \times IP_o^t = \prod\left[\left(\frac{P_{ti}}{P_{oi}}\right)\times\left(\frac{P_{oi}}{P_{ti}}\right)\right]^{\left(\frac{P_{oi}Q_{oi}}{\sum P_{oi}Q_{oi}}\right)}$$

Simplificando:

$$I_t^o \times I_o^t = \prod\left[\left(\frac{\cancel{P}_{ti}}{\cancel{P}_{oi}}\right)\times\left(\frac{\cancel{P}_{oi}}{\cancel{P}_{ti}}\right)\right]^{\left(\frac{P_{oi}Q_{oi}}{\sum P_{oi}Q_{oi}}\right)}$$

$$= \prod(1)^{\left(\frac{P_{oi}Q_{oi}}{\sum P_{oi}Q_{oi}}\right)} = 1$$

En los índices geométricos, sólo si la proporción de gastos permanece sin variación, la propiedad se cumpliría.

ÍNDICES DE TOURNQVIST - THEIL

$$_{\cdot T}IP_t^o = \prod\left(\frac{P_{it}}{P_{io}}\right)^{\frac{\alpha_t+\alpha_o}{2}}$$

$$_{\cdot T}IP_o^t = \prod\left(\frac{P_{io}}{P_{it}}\right)^{\frac{\alpha_t+\alpha_o}{2}}$$

Donde: α_i es la ponderación para el artículo i-ésimo

$$\alpha_o = \frac{P_oQ_o}{\sum P_oQ_o}$$

$$\alpha_i = \frac{P_tQ_t}{\sum P_tQ_t}$$

entonces:

$$_{\cdot T}IP_t^o x_{\cdot T}IP_o^t = \prod\left(\frac{P_t}{P_o}\right)^{\frac{\alpha_t+\alpha_o}{2}} x\prod\left(\frac{P_o}{P_t}\right)^{\frac{\alpha_t+\alpha_o}{2}}$$

$$_{\cdot T}IP_t^o x_{\cdot T}IP_o^t = \prod\left(\frac{P_o}{P_t} x \frac{P_t}{P_o}\right)^{\frac{\alpha_t+\alpha_o}{2}} = \prod(1)^{\frac{\alpha_t+\alpha_o}{2}} = 1$$

El Índice de Tournqvist - Theil si cumple esta propiedad.

6.2 CIRCULARIDAD O ENCADENAMIENTO (TRANSITIVIDAD)

La prueba de circularidad requiere de disponer de dos períodos adicionales al período base. Esta prueba consiste en asociar los tres períodos con la siguiente relación:

Dados P_2, P_1 y P_0

$$\frac{P_2}{P_o} = \frac{P_2}{P_1} x \frac{P_1}{P_0}$$

Matemáticamente se demuestra que para cumplir con estas pruebas en el caso del índice de Laspeyres o Paasche es condición necesaria y suficiente que las cantidades consumidas se mantengan constantes.

En el caso del índice geométrico sólo cumple estas pruebas si la proporción de gasto se mantiene sin variar en los tres períodos, situación que no necesariamente se cumple. Al respecto se analizaron y compararon las estructuras de ponderaciones de gasto obtenido a partir de las encuestas realizadas en Lima Metropolitana en los años 1979, 1988, 1989, 1990 y 1994, y se demostró que las ponderaciones sufren variaciones. Es decir, el índice geométrico, en este caso tampoco cumpliría la propiedad de la transitividad

Ejemplo:

Si los precios de un artículo son 50, 100 y 150 en los períodos "o", "1" y "2", se comprueba que el precio en el período "1" es el 200% del período "o", el período "2" es 150% del "1". En consecuencia, el precio del último es 300% del primero.

$$\frac{P_1}{P_o} x \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1}{P_0} \quad , \quad \frac{100}{50} x \frac{150}{100} = \frac{150}{50} = 3$$

El hecho de que un sistema de números índices sea o no transitivo depende fundamentalmente de que las ponderaciones sean fijas o móviles y de que los índices para períodos no consecutivos sean calculados directamente o encadenados.

Índices de Ponderaciones Fijas (por ejemplo, Laspeyres) satisfacen la prueba de transitividad, como lo hacen los Índices Encadenados, no así los de Ponderaciones Móviles.

ÍNDICES DE LASPEYRES

$$\boxed{{}_{\cdot L}IP_t^o = \frac{\sum P_t Q_o}{\sum P_o Q_o}}$$

Luego deseamos probar:

$$\boxed{{}_{\cdot L}IP_2^o \neq {}_{\cdot L}IP_2^1 x\, {}_{\cdot L}IP_1^o}$$

La propiedad anterior aplicada a la fórmula del índice de Laspeyres nos permite afirmar lo siguiente:

Los Índices de Precios de Laspeyres con Ponderaciones Fijas en el período base, satisface esta prueba.

$$\boxed{{}_{\cdot L}IP_1^o x\, {}_{\cdot L}IP_{2/1}^0 = {}_{\cdot L}IP_2^o}$$

Reemplazando por sus respectivos equivalentes:

$$\frac{\sum P_1 Q_o}{\sum P_o Q_o} x \frac{\sum P_2 Q_o}{\sum P_1 Q_o} = \frac{\sum P_2 Q_o}{\sum P_o Q_o}$$

Los índices de Precios de Laspeyres con Ponderación Móvil, sin encadenamiento no satisfacen esta prueba.

Donde:

$$._L IP_2^{\,o} = \frac{\sum P_2 Q_o}{\sum P_o Q_o} \quad ; \quad ._L IP_2^{\,1} = \frac{\sum P_2 Q_1}{\sum P_1 Q_1}$$

$$._L IP_1^{\,o} = \frac{\sum P_1 Q_o}{\sum P_o Q_o}$$

Entonces:

$$._L IP_2^{\,1} \, x \, ._L IP_1^{\,o} = \frac{\sum P_2 Q_1}{\sum P_1 Q_1} x \frac{\sum P_1 Q_o}{\sum P_o Q_o}$$

Si: $Q_1 = Q_o$

$$= \frac{\sum P_2 Q_o}{\sum P_o Q_o}$$

$$= ._L IP_2^{\,o}$$

Para que se cumpla esta propiedad en los índices de Laspeyres es necesario que $Q_o = Q_1$. Esto es, que en períodos sucesivos la cantidad consumida de un bien debe ser invariable.

ÍNDICES DE PAASCHE

$$._P IP_t^{\,o} = \frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_o Q_t}$$

Luego, deseamos probar:

$$._P IP_2^{\,o} = ._P IP_2^{\,1} \, x \, ._P IP_1^{\,o}$$

Donde:

$$._P IP_2^{\,o} = \frac{\sum P_2 Q_2}{\sum P_o Q_2} \quad ; \quad ._P IP_2^{\,1} = \frac{\sum P_2 Q_2}{\sum P_1 Q_2}$$

$$._P IP_1^{\,o} = \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_o Q_1}$$

Entonces:

$$._P IP_2^{\,1} \, x \, ._P IP_1^{\,0} = \frac{\sum P_2 Q_2}{\sum P_1 Q_2} \, x \, \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_o Q_1}$$

Si $Q_1 = Q_2$, Tenemos:

$$= \frac{(\sum P_2 Q_2)}{(\sum P_o Q_2)}$$

$$= ._P IP_2^{\,0}$$

Para que se cumpla esta propiedad en Paasche, se debe tener en cuenta dentro de la estructura que las ponderaciones de las cantidades deben ser fijas.

ÍNDICES DE FISHER

$$._F IP_t^{\,o} = \sqrt{._L IP_t^{\,o} \, x \, ._P IP_t^{\,o}}$$

Es decir:

$$\boxed{._F IP_t^{\,o} = \sqrt{\frac{\sum P_t Q_o}{\sum P_o Q_o} \, x \, \frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_o Q_t}}}$$

Luego, deseamos probar:

$$._F IP_2^{\,o} = ._F IP_2^{\,1} \; x \; ._F IP_1^{\,o}$$

Donde:

$$._F IP_2^{\,o} = \sqrt{\frac{\sum P_2 Q_o}{\sum P_o Q_o} x \frac{\sum P_2 Q_2}{\sum P_o Q_2}} \;\; ; \;\; ._F IP_2^{\,1} = \sqrt{\frac{\sum P_2 Q_1}{\sum P_1 Q_1} x \frac{\sum P_2 Q_2}{\sum P_1 Q_2}}$$

$$._F IP_1^{\,o} = \sqrt{\frac{\sum P_1 Q_o}{\sum P_o Q_o} x \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_o Q_1}}$$

Entonces:

$$._F IP_2^{\,1} \; x \; ._F IP_1^{\,o} = \sqrt{\frac{\sum P_2 Q_1}{\sum P_1 Q_1} x \frac{\sum P_2 Q_2}{\sum P_1 Q_2}} x \sqrt{\frac{\sum P_1 Q_o}{\sum P_o Q_o} x \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_o Q_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum P_2 Q_1}{\sum P_1 Q_1} x \frac{\sum P_2 Q_2}{\sum P_1 Q_2} x \frac{\sum P_1 Q_o}{\sum P_o Q_o} x \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_o Q_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum P_2 Q_1 \times \sum P_2 Q_2 \times \sum P_1 Q_o}{\sum P_1 Q_2 \times \sum P_o Q_o \times \sum P_o Q_1}}$$

Luego, si:

$P_0 \; : \; P_1$ .... (I)

$Q_0 \; : \; Q_1$ .... (II)

tenemos:

$$= \sqrt{\frac{\sum P_2 Q_o}{\sum P_o Q_o} x \frac{\sum P_2 Q_2}{\sum P_o Q_2}} = ._F IP_2^{\,o}$$

En Fisher, para que esta propiedad se cumpla se deben tener en cuenta dentro de la estructura que se cumplan las condiciones I y II. Es decir que las cantidades y precios del periodo base, no varíen en el periodo siguiente.

ÍNDICES GEOMÉTRICOS

La propiedad de encadenamiento implica que:

$$\boxed{._G I_2^0 \;=\; ._G I_1^0 \quad x \quad ._G I_2^1}$$

La propiedad de encadenamiento aplicada a la fórmula de la Media Geométrica ponderada es la siguiente;

Se sabe que:

$$._G IP^0_2 \;=\; ._G IP^0_1 \;\; x \;\; ._G IP^1_2$$

Reemplazando por sus respectivas fórmulas tenemos:

$$._G IP_2^0 \;=\; \Pi \left(\frac{P_{1i}}{P_{oi}}\right)^{\left(\frac{P_{oi}Q_{oi}}{\sum P_{oi}Q_{oi}}\right)} \; x \Pi \left(\frac{P_{2i}}{P_{1i}}\right)^{\left(\frac{P_{1i}Q_{1i}}{\sum P_{1i}Q_{1i}}\right)}$$

Si la proporción de gasto por cada artículo permanece invariante en el tiempo tenemos:

$$= \Pi\left[\left(\frac{P_{1i}}{P_{oi}}\right)x\left(\frac{P_{2i}}{P_{1i}}\right)\right]^{\left(\frac{P_{oi}Q_{oi}}{\sum P_{oi}Q_{oi}}\right)}$$

Simplificando:

$$= \Pi\left(\frac{P_{2i}}{P_{oi}}\right)^{\left(\frac{P_{oi}Q_{oi}}{\sum P_{oi}Q_{oi}}\right)}$$

$$= IP_2^o$$

El índice Geométrico, cumple esta propiedad sólo si la proporción de gastos permanece invariante en el tiempo.

$$\left(\frac{P_{oi}Q_{oi}}{\sum P_{oi}Q_{oi}}\right) = \left(\frac{P_{1i}Q_{1i}}{\sum P_{1i}Q_{1i}}\right)$$

ÍNDICES DE TOURNQVIST - THEIL

Se debe de cumplir que:

$$\bullet_T IP_1^o \times \bullet_T IP_2^1 = \bullet_T IP_2^o$$

Se tienen las siguientes relaciones:

(A)	(B)	(C)
$._T IP_1^o = \Pi(\frac{P_1}{P_0})^{\frac{\alpha_o+\alpha_1}{2}}$	$._T IP_2^1 = \Pi(\frac{P_2}{P_1})^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}$	$._T IP_2^o = \Pi(\frac{P_2}{P_2})^{\frac{\alpha_o+\alpha_2}{2}}$

De modo que:

$$\boxed{._T IP_1^0 \times ._T IP_2^1 = \prod\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}} \times \prod\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}}$$

Entonces operando:

$$._T IP_1^o \; x \; ._T IP_2^1 = \Pi\left(\frac{P_2}{P_0}\right)^{\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}}$$

Para que se pueda realizar la operación debe de cumplirse:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \frac{\alpha_o+\alpha_1}{2} => \alpha_o = \alpha_2 \ldots (II)$$

Finalmente, quedaría la relación de la siguiente manera:

$$._T IP_1^o \; x \; ._T IP_2^1 = \Pi\left(\frac{P_2}{P_0}\right)^{\frac{\alpha_2+\alpha_o}{2}} = ._T IP_2^o$$

Por lo tanto el Índice de Tournqvist - Theil cumple la propiedad de circularidad siempre que se cumpla que las ponderaciones no varíen en períodos consecutivos.

6.3 REVERSIÓN DE FACTORES

Al considerar por cada artículo un precio "P" y una cantidad "Q" el Producto corresponde al valor (producido, vendido, consumido, etc.).

Análogamente, el producto de un Índice de Precios por un Índice de Cantidad debe ser igual a un Índice de Valor.

En el Marco de la Contabilidad Nacional, propuesto por Naciones Unidas se acepta que las Oficinas de Estadísticas de los Países a Nivel Mundial pueden combinar Índice de Precios, Índices de Cantidad del tipo de Laspeyres con Paasche a fin de reproducir un Índice de Valor.

Es decir, la prueba de inversión de factores no obliga a utilizar sólo índices de Laspeyres o de Paasche para satisfacerla sino más bien recomienda combinarlos.

Es necesario mencionar que para la Teoría Económica un índice de valor es la comparación sencilla de 2 valores entre 2 períodos de tiempo a partir del cual se realiza el análisis necesario y/o se descompone en precios y cantidades.

La utilización de la Media Geométrica por ejemplo para obtener Índices de Valor, generaría dificultades de uso e interpretación.

ÍNDICES DE LASPEYRES Y PAASCHE

Es importante anotar que en forma individual, esta relación no se cumple para los Índices de Laspeyres y Paasche.

$$ {}_{L}IP_t^o \; x \; {}_{L}IQ_t \neq \frac{\sum P_t Q_o}{\sum P_o Q_o} \; x \; \frac{\sum Q_t P_o}{\sum Q_o P_o} \neq \frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_o Q_o} = IV_t^o $$

$$ {}_{P}IP_t^o \; x \; {}_{P}I_t^o \neq \frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_o Q_t} \; x \; \frac{\sum Q_t P_t}{\sum Q_o P_t} \neq \frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_o Q_o} = IV_t^o $$

No obstante, un Índice de Cantidades de Ponderaciones Fijas de Laspeyres combinado con un Índice de Precios de Paasche; así mismo el producto de un Índice de Precios de Laspeyres por un Índice de Cantidades de Paasche, reproducen en ambos casos un Índice de Valor.

$$ {}_{L}IQ_t^o \; x \; {}_{P}IP_t^o = IV_t^o $$

$$ \frac{\sum Q_t P_o}{\sum Q_o P_o} \, X \, \frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_o Q_t} = \frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_o Q_o} = IV_t^o $$

$$ {}_{L}IP_t^o \; x \; {}_{P}IQ_t^o = IV_t^o $$

$$ \frac{\sum P_t Q_o}{\sum P_o Q_o} \, X \, \frac{\sum Q_t P_t}{\sum Q_o P_t} = \frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_o Q_o} = IV_t^o $$

Esta relación puede aprovecharse siempre que se conozcan los valores totales de ambos períodos. Cuando los índices de valores son conocidos, puede obtenerse indirectamente un par complementario de índices de Laspeyres y Paasche. El índice de volumen de Laspeyres puede obtenerse indirectamente dividiendo la variación proporcionada de los valores por el índice de precios de Paasche, procedimiento que recibe el nombre de deflación de precios. Como normalmente es más fácil y barato calcular índices directos de precios que de volumen, se utiliza este procedimiento tanto en las Cuentas Nacionales y en las estadísticas económicas en general.

ÍNDICES DE FISHER

Los Índices de Fisher, si cumplen esta prueba.

$$_F IP_t^o \; x \; _F IQ_t^o = \sqrt{_L IP_t^o \; x \; _P IP_t^o} \; x \; \sqrt{_L IQ_t^o \; x \; _P IQ_t^o}$$

De las definiciones anteriores, reemplazando y simplificando tenemos:

$$= \frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_o Q_o} = IV_t^o$$

ÍNDICES GEOMÉTRICOS

$$_G IP_t^o = \Pi\left(\frac{P_{ti}}{P_{oi}}\right)^{\alpha_i} \quad ; \quad _G IP_t^o = \Pi\left(\frac{P_{ti}}{P_{oi}}\right)^{\alpha_i}$$

Donde:

$$\alpha_i = \frac{P_{oi} Q_{oi}}{\sum P_{oi} Q_{oi}}$$

Además se cumple:

$$_G IP_t^o \; x \; _G IQ_t^o = IV_t^o$$

Donde:

$$IV_t^o = \Pi\left(\frac{P_{ti} Q_{ti}}{P_{oi} Q_{oi}}\right)^{\alpha_i}$$

Entonces tenemos:

$$_G IP_t^o \; x \; _G IQ_t^o = \Pi\left(\frac{P_{ti}}{P_{oi}}\right)^{\alpha_i} x \, \Pi\left(\frac{Q_{ti}}{Q_{oi}}\right)^{\alpha_i}$$

De donde ambos miembros tienen el mismo exponente, por lo cual resulta:

$$= \left[\Pi\left(\frac{P_{ti}}{P_{oi}}\right) x \, \Pi\left(\frac{Q_{ti}}{Q_{oi}}\right)\right]^{\alpha_i}$$

$$= \Pi\left(\frac{P_{ti} Q_{ti}}{P_{oi} Q_{oi}}\right)^{\alpha_i}$$

$$= IV_t^o$$

El índice Geométrico, si cumple esta prueba.

ÍNDICES DE TOURNQVIST- THEIL

Donde:

$$_T IP_t^o = \Pi\left(\frac{P_{it}}{P_{io}}\right)^{\frac{\alpha_t+\alpha_o}{2}} \quad ; \quad _T IQ_t^o = \Pi\left(\frac{Q_{it}}{Q_{io}}\right)^{\frac{\alpha_t+\alpha_o}{2}}$$

$$\alpha_i = \frac{P_i Q_i}{\sum P_i Q_i}$$

Entonces tenemos:

$$_T IP_t^o \; x \; _T IQ_t^o = \Pi\left(\frac{P_{it}}{P_{io}}\right)^{\frac{\alpha_t+\alpha_o}{2}} x \, \Pi\left(\frac{Q_{it}}{Q_{io}}\right)^{\frac{\alpha_t+\alpha_o}{2}}$$

Luego, como ambos miembros tienen el mismo exponente, resulta:

$$= \left[\Pi \left(\frac{P_{it}}{P_{io}} \right) x \, \Pi \left(\frac{Q_{it}}{Q_{io}} \right) \right]^{\frac{\alpha_t + \alpha_o}{2}}$$

$$= \Pi \left(\frac{P_{it} Q_{it}}{P_{io} Q_{io}} \right)^{\frac{\alpha_t + \alpha_o}{2}}$$

$$= {}_{.T} IV_t^{\,o}$$

El índice de Tournqvist - Theil, si cumple esta prueba.

Además de los criterios planteados, es necesario examinar otras propiedades que debe tener un buen índice como son las que siguen a continuación.

6.4 CARACTERICIDAD DE LAS PONDERACIONES

Las ponderaciones deben ser características de los períodos que se comparan. Los Índices de Ponderaciones Fijas tienden a resultar obsoletas a medida que se prolonga el período para el cual se utilizan las ponderaciones, además cuando los índices se utilizan para establecer comparaciones entre dos períodos diferentes al período base, las ponderaciones, pueden no representar a ninguno de los períodos que se comparan. Motivo por el cual, cuando se utilizan ponderaciones fijas es necesario revisar periódicamente la base de ponderación. Cuando existe inestabilidad en el comportamiento de los precios, o cambios en la estructura económica el cambio se hace necesario.

6.5 CONSISTENCIA INTERNA O CONGRUENCIA ADITIVA

El único requisito que impone la consistencia interna es que los sumandos de un total valorados a precios corrientes pueden seguir sumándose para obtener los totales correspondientes después de una valoración a precios del período base.

Para obtener un agregado económico a precios del período base, se puede efectuar de 2 maneras:

- Multiplicar por el período base los Índices de Cantidad de Laspeyres.
- Deflaccionar la serie de valores corrientes por un Índice de Precios de Paasche.

Sólo estos dos métodos permiten que los asientos reevaluados de las cuentas económicas puedan seguir sumándose sin que la suma resulte deformada, en caso contrario se tendría que aperturar partidas de compensación, que estaría desprovisto de significado económico.

6.6 SIMPLICIDAD DE PROCESAMIENTO E INTERPRETACION

Una característica adicional digna de mencionar es la simplicidad, en el procesamiento así como en la interpretación de la información, que las cumplen Laspeyres y Paasche.

En la práctica, ningún índice satisface todas las pruebas, siendo relativamente mejores y complementándose unas con otras, Laspeyres y Paasche.

De otro lado, cuando hay estabilidad de precios y de la estructura económica, se puede aplicar índices de precios de Laspeyres para medir su evolución.

EJERCICIO Nº 4

En base a los datos de la tabla 6.1 se pide:

1. Deducir la serie de índice de precios y cantidades de Laspeyres, Paasche y Fisher, con base en el año 1989.

2. Probar con los Índices que se indican el cumplimiento de las siguientes propiedades:

a) Reversibilidad Temporal (Laspeyres, Paasche y Fisher).
b) Reversibilidad Circular o Transitiva (Laspeyres con base fija y base móvil).
c) Reversibilidad de Factores (Año 1992).

3. Realizar para el año 1992 los siguientes productos de Índices y Comentar.

a) Precios de Laspeyres por Cantidades de Paasche.
b) Precios de Paasche por Cantidades de Laspeyres.

4. ¿Qué fórmula mantiene la caractericidad de las ponderaciones?

5. ¿Cómo se ha obtenido el Valor Bruto de Producción (VBP) a precios constantes de 1989?

6. Verificar la consistencia al aplicar los Índices de precios deflactando los valores corrientes con índices de Laspeyres, Paasche y Fisher. Comentar.

7. Verificar la consistencia de los Índices de Cantidad, extrapolando el valor de producción del período base por Índices de Laspeyres y Paasche. Comentar

Tabla 6.1
ÍNDICES DE LASPEYRES, PAASCHE Y FISHER CON VALORES A PRECIOS CORRIENTES Y CONSTANTES

Artículos e Índices	1989	1992	1993
Valores a Precios Corrientes $\left(\sum P_t Q_t\right)$			
Valor Total	**445.0**	**1 260.0**	**2 045.0**
1	100.0	350.0	450.0
2	45.0	210.0	380.0
3	300.0	700.0	1 215.0
Valores a Precios Constantes $\left(\sum P_{89} Q_t\right)$			
Valor Total	**445.0**	**282.5**	**360.0**
1	100.0	87.5	75.0
2	45.0	45.0	60.0
3	300.0	150.0	225.0

Se sabe además que:

$\Sigma P_{92} Q_{89} = 2{,}010$
$\Sigma P_{93} Q_{89} = 2{,}505$
$\Sigma P_{93} Q_{92} = 2{,}958$
$\Sigma P_{92} Q_{93} = 2{,}045$

SOLUCIONARIO

1) Índice de precios y cantidades de Laspeyres, Paasche y Fisher:

Índice de Laspeyres			
Precio	100.0	451.69	562.92
Cantidad	100.0	63.48	80.90
Índice de Paasche			
Precio	100.0	446.02	568.06
Cantidad	100.0	62.69	81.64
Índice de Fisher			
Precio	100.0	448.85	565.48
Cantidad	100.0	63.08	81.27
Índice de Valor	100.0	283.14	459.54

2) Probando algunas propiedades:

a) **Reversibilidad Temporal**

Índice de Laspeyres

$$IP_{92}^{89}\, x\, IP_{89}^{92} = \frac{\sum P_{92}Q_{89}}{\sum P_{89}Q_{89}}\, x\, \frac{\sum P_{89}Q_{92}}{\sum P_{92}Q_{92}}$$

$$= \frac{2010}{445}\, x\, \frac{282.5}{1260.0} = 1.0127 \; {}^{2/}$$

$${}_{.L}IQ_{92}^{89}\, x\, {}_{.L}IQ_{89}^{92} = \frac{\sum Q_{92}P_{89}}{\sum P_{89}Q_{89}}\, x\, \frac{\sum Q_{89}P_{92}}{\sum Q_{92}P_{92}}$$

$$= \frac{282.5}{445}\, x\, \frac{2010}{1260.0} = 1.0127$$

Índice de Paasche

$${}_{.P}IP_{92}^{89}\, x\, {}_{.P}IP_{89}^{92} = \frac{\sum P_{92}Q_{92}}{P_{89}Q_{92}}\, x\, \frac{\sum P_{89}Q_{89}}{P_{92}Q_{89}}$$

$$= \frac{1260}{282.5}\, x\, \frac{445}{2010} = 0.9875$$

$${}_{.p}IQ_{92}^{89}\, x\, {}_{.p}IQ_{89}^{92} = \frac{\sum Q_{92}P_{92}}{Q_{89}P_{92}}\, x\, \frac{\sum Q_{89}P_{89}}{Q_{92}P_{89}}$$

$$= \frac{1260}{2010}\, x\, \frac{445}{282.5} = 0.9875$$

[2/] Se excluye el porcentaje del Índice, con fines académicos

Índice de Fisher

$${}_{.F}IP_{89}^{92} = \sqrt{{}_{.L}IP_{89}^{92}\; x\; {}_{.p}IP_{89}^{92}} = \sqrt{\frac{\sum P_{89}Q_{92}}{\sum P_{92}Q_{92}}\, x\, \frac{\sum P_{89}Q_{89}}{\sum P_{92}Q_{89}}}$$

Reemplazando valores en base a los datos de la Tabla 6.1:

$$= \sqrt{\frac{282.5}{1260}\, x\, \frac{445}{2010}} = 0.2228$$

Siendo:

$${}_{.F}IP_{92}^{89} = \frac{448.85}{100} = 4.4885$$

Entonces: ${}_{.F}IP_{92}^{89}\, x\, {}_{.F}IP_{89}^{92} = 4.4885x0.2228 = 1$

$${}_{.F}IQ_{89}^{92} = \sqrt{{}_{.L}IQ_{89}^{92}\; x\; {}_{.P}IQ_{89}^{92}} = \sqrt{\frac{\sum Q_{89}P_{92}}{\sum Q_{92}P_{92}}\, x\, \frac{\sum Q_{89}P_{89}}{\sum Q_{92}P_{89}}}$$

Reemplazando valores en base a los datos de la tabla:

$$= \sqrt{\frac{2{,}010}{1{,}260}\, x\, \frac{445}{282.5}} = 1.5852$$

Siendo:

$${}_{.F}IQ_{92}^{89} = \frac{63.08}{100} = 0.6308$$

Entonces:

$$_{.F}IQ_{92}^{89}\,x\,_{.F}IQ_{89}^{92} = 0.6308\ x\ 1.5852 = 1$$

b) **Reversibilidad Circular o Transitiva**

Índice de Laspeyres con base fija en 1989

$$_{.L}IP_{92}^{89}\ x\ _{.L}IP_{93/92}^{89} = {}_{.L}\ IP_{93}^{89}$$

$$\frac{\sum P_{92}Q_{89}}{\sum P_{89}Q_{89}}\ x\ \frac{\sum P_{93}Q_{89}}{\sum P_{92}Q_{89}} = \frac{2010}{445}\ x\ \frac{2505}{2010} = 5.6292$$

$$_{.L}IQ_{92}^{89}\,x\,_{.L}IQ_{93/92}^{89} = {}_{.L}IQ_{93}^{89}$$

$$\frac{\sum Q_{92}P_{89}}{\sum Q_{89}P_{89}}\ x\ \frac{\sum Q_{93}P_{89}}{\sum Q_{92}P_{89}} = \frac{282.5}{445}\ x\ \frac{360}{282.5} = 0.8090$$

Índice de Laspeyres con Base Móvil

$$_{.L}IP_{92}^{89}\ x\ _{.L}IP_{93}^{92} \neq {}_{.L}IP_{93}^{89}$$

$$\frac{\sum P_{92}Q_{89}}{\sum P_{89}Q_{89}}\ \text{x}\ \frac{\sum P_{93}Q_{92}}{\sum P_{92}Q_{92}} = \frac{2010}{445}\ \text{x}\ \frac{2958}{1260} = 10.6038$$

$$_{.L}IQ_{92}^{89}\ x\ _{.L}IQ_{93}^{92} \neq {}_{.L}IQ_{93}^{89}$$

$$\frac{\sum Q_{92}P_{89}}{\sum Q_{89}P_{89}}\ x\ \frac{\sum Q_{93}P_{92}}{\sum Q_{92}P_{92}} = \frac{282.5}{445}\ x\ \frac{2045}{1260} = 1.030$$

c) **Reversibilidad de Factores (Año 1992)**

Índice de Laspeyres

$$_{.L}IP_{92}^{89}\,x\,_{.L}IQ_{92}^{89} \neq {}_{.L}IV_{92}^{89}$$

$$4.5169\ \text{x}\ 0.6348 = 2.8673 \neq 2.8315$$

Índice de Paasche

$$_{.P}IP_{92}^{89}\,x\,_{.P}IQ_{92}^{89} \neq {}_{.P}IV_{92}^{89}$$

$$4.4602\ \text{x}\ 0.6269 = 2.7961 \neq 2.8315$$

Índice de Fisher

$$_{.F}IP_{92}^{89}\,x\,_{.F}IQ_{92}^{89} = {}_{.F}IV_{92}^{89}$$

$$4.4885\ \text{x}\ 0.6308 = 2.8313 \cong 2.8315$$

3) Realizando las operaciones:

$$_{.L}IP_{92}^{89}\,x\,_{.P}IQ_{92}^{89} = IV_{92}^{89}$$

$$4.5169\ \text{x}\ 0.6269 = 2.8316 = 2.8315$$

$$_{.P}IP_{92}^{89}\,x\,_{.L}IQ_{92}^{89} = IV_{92}^{89}$$

$$4.4602\ \text{x}\ 0.6348 = 2.8313 = 2.8315$$

Comentario:

Sólo al combinar un Índice de Precios de Laspeyres con un Índice de Cantidad de Paasche, así como un Índice de Precios de Paasche con un Índice de Cantidad de Laspeyres, se reproduce un Índice de Valor, cumpliéndose de esta forma la reversibilidad de factores.

4) Fórmula que mantiene la caractericidad de las Ponderaciones

Para analizar si una fórmula mantiene la caractericidad de las ponderaciones, las mismas deben ser representativas de los períodos en estudio.

Si los Índices de Precios de Laspeyres y Paasche coinciden para algún período, quiere decir que la estructura de ponderaciones es igual a la del período base, luego, el Índice de Laspeyres sigue siendo representativo del período en estudio.

Los Índices de Paasche, por mantener actualizada las ponderaciones mantienen siempre la caractericidad de las mismas.

A continuación se analiza la representatividad de las ponderaciones para los índices de precios y cantidad de Laspeyres.

Tabla 6.2
PONDERACIONES PARA LOS ÍNDICES DE PRECIOS

Artícu-los	Precio unitario en 1989	1989		1992		1993	
		$P_{i89}Q_{i89}$	%	$P_{i89}Q_{i92}$	%	$P_{i89}Q_{i93}$	%
1	25.0	100.0	22.47	87.5	30.97	75.0	20.83
2	30.0	45.0	10.11	45.0	15.93	60.0	16.67
3	150.0	300.0	67.42	150.0	53.10	225.0	62.50
TOTAL		**445.0**	**100.0**	**282.5**	**100.0**	**360.0**	**100.0**

Tabla 6.3
PONDERACIONES PARA LOS ÍNDICES DE CANTIDADES

Artícu-los	Número deUnid. en 1989	1989		1992		1993	
		$P_{i89}Q_{i89}$	%	$P_{i92}Q_{i89}$	%	$P_{i93}Q_{i89}$	%
1	4.0	100.0	22.47	400.0	19.90	600.0	23.95
2	1.5	45.0	10.11	210.0	10.45	285.0	11.38
3	2.0	300.0	67.42	1 400.0	69.65	1 620.0	64.67
TOTAL		**445.0**	**100.0**	**2 010.0**	**100.0**	**2 505.0**	**100.0**

Tabla 6.4
ESTRUCTURA % DE LA PRODUCCIÓN
(en valores a precios corrientes)

Artícu-los	1989		1992		1993	
	$P_{i89}Q_{i89}$	%	$P_{i92}Q_{i92}$	%	$P_{i93}Q_{i93}$	%
1	100.0	22.47	350.0	27.78	450.0	22.01
2	45.0	10.11	210.0	16.67	380.0	18.58
3	300.0	67.42	700.0	55.55	1 215.0	59.41
TOTAL	**445.0**	**100.0**	**1 260.0**	**100.0**	**2 045.0**	**100.0**

La estructura de ponderaciones para el Índice de Cantidades, es más estable que para el respectivo de precios, situación que hace que los Índices de Precios sean más disímiles, que sus similares de cantidades. Lo que se puede verificar del análisis de los resultados.

De otro lado, la estructura de ponderaciones en valores corrientes es útil, a fin de observar cual sería las nuevas ponderaciones si esta se cambiara a Base 1992 o 1993, del estudio de las mismas se desprende que son muy cercanas a las ponderaciones actualizadas, las diferencias con respecto a la primera tabla es por efecto de los relativos precios, y con el segundo, por efecto de los relativos de cantidades.

5) El valor de producción total a precios constantes de 1989 se obtiene de multiplicar los precios del año 1989 por las cantidades de los artículos en los tres períodos.

<u>Metodología</u>

Valor Bruto de la Producción en soles constantes de 1989

$$(\overline{VBP}_t^{89}) \qquad \overline{VBP}_{89}^{89} = \sum P_{89}Q_{89}$$

$$\overline{VBP}_{92}^{89} = \sum P_{89}Q_{92} \qquad \overline{VBP}_{93}^{89} = \sum P_{89}Q_{93}$$

Tabla 6.5

ESTRUCTURA DEL VALOR BRUTO DE LA PRODUCCIÓN
(en valores de precios constantes de 1989)

Artículos	Precio unitario en 1989	1989		1992		1993	
		Can-tidad	Valor en soles de 1989	Can-tidad	Valor en soles de 1989	Can-tidad	Valor en soles de 1989
1	25.0	4.0	100	3.5	87.5	3.0	75.0
2	30.0	1.5	45	1.5	45.0	2.0	60.0
3	150.0	2.0	300	1.0	150.0	1.5	225.0
VBP			**445**		**282.5**		**360.0**

6) Verificando consistencia al utilizar Índices de Precio Base 1989 para deflactar los valores corrientes:

Tabla 6.6

ÍNDICE DE PRECIOS DE LASPEYRES, PAASCHE Y FISHER (Año Base 1989=100.0)

CONCEPTO	1989	1992	1993
Valor Corriente	445.0	1 260.0	2 045.0
Deflactando con Índices de Precios Base 1989 =100.0			
Laspeyres	445.0	278.95	363.28
Paasche	445.0	282.50	360.00
Fisher	445.0	280.72	361.64

Fórmula Aplicada:

$$\boxed{\overline{V}_t^{89} = \frac{V_t}{IP_t^{89}} x100}$$

<u>Comentario</u>:

Al deflactar el valor corriente de producción con el índice de precios de Paasche se reproduce los valores constantes correctos, motivo por el cual su aplicación mantiene la consistencia (Por construcción del Índice la misma se puede verificar teóricamente).

7) Verificando la consistencia de los Índices de Cantidad:
Extrapolación con Índices de Cantidad el valor del año base (445)

Tabla 6.7

ÍNDICE DE CANTIDADES DE LASPEYRES, PAASCHE Y FISHER (Año Base 1989=100.0)

Índice	1992	1993
Laspeyres	282.50	360.00
Paasche	278.96	363.28
Fisher	280.72	361.64

Fórmulas Aplicadas:

$$\overline{V}_t^{89} = \frac{V_{89} x IQ_t^{89}}{100} \qquad \overline{V}_t^{89} = \frac{445 x IQ_t^{89}}{100}$$

Comentario:

Al extrapolar el valor de producción de 1989 con el Índice de Cantidad de Laspeyres, también permite observar resultados correctos.

EJERCICIO Nº 5

En el supuesto de una actividad agropecuaria con sólo 2 productos se presenta la siguiente información estadística de Precios y Cantidad.

Tabla 6.8

PRECIO Y PRODUCCIÓN DE ARROZ CÁSCARA Y TRIGO, 1991 – 1993 (por tonelada métrica)

Años	Arroz Cáscara		Trigo	
	Precio X TM	Cantidad (TM)	Precio X TM	Cantidad (TM)
1991	170,00	814168	230,00	127046
1992	262,39	829373	301,60	73061
1993	410,00	967627	500,00	108126

Fuente: Ministerio de Agricultura. Oficina de Información Agraria

1. Elaborar los Índices de Precios y Cantidades para 1992 y 1993 con base 1991 mediante los siguientes métodos:
   a) Laspeyres
   b) Paasche
   c) Sidwick-Drobisch
   d) Fisher
   e) Marshall-Edgeworth
   f) Walsh
   g) Keynes

2. Calcular los Índices Geométricos de Precios y Cantidad para los años 92 y 93 con base en 1991 mediante las siguientes fórmulas:
   a) Índices de Precios.

$$._G IP_t^o = \prod_1^n \left(\frac{P_{it}}{P_{io}}\right)^{\alpha_i} x100$$

   b) Índice de Cantidades.

$$._G IQ_t^o = \prod_1^n \left(\frac{Q_{it}}{Q_{io}}\right)^{\alpha_i} x100$$

   donde:

$$\alpha_{io} = \frac{P_{io} Q_{io}}{\sum P_{io} Q_{io}} \quad o \quad \alpha_{it} = \frac{P_{it} Q_{it}}{\sum P_{it} Q_{it}}$$

3. Calcular los Índices de Tournqvist-Theil de Precios y Cantidad para los años 1992 y 1993 con base en 1991 mediante las siguientes fórmulas:

   a) Índices de Precios.

$$._T IP_t^o = \prod_1^n \left(\frac{P_{it}}{P_{io}}\right)^{\frac{\alpha_{io}+\alpha_{it}}{2}} x100$$

   b) Índice de Cantidades.

$$._T IQ_t^o = \prod_1^n \left(\frac{Q_{it}}{Q_{io}}\right)^{\frac{\alpha_{io}+\alpha_{it}}{2}} x100$$

   Donde:

$$\alpha_{io} = \frac{P_{io} Q_{io}}{\sum P_{io} Q_{io}} \quad y \quad \alpha_{it} = \frac{P_{it} Q_{it}}{\sum P_{it} Q_{it}}$$

4. Para los Índices de Laspeyres, Paasche, Fisher, Geométrico y de Tournqvist-Theil, verificar las siguientes propiedades:

a) Reversibilidad Temporal.

$$IP_{92}^{91} \, x \, IP_{91}^{92} = 1$$

b) Circularidad.

$$IP_{93}^{91} = IP_{92}^{91} \, x \, IP_{93}^{92}$$

c) Inversión de Factores.

$$IP_{93}^{91} \, x \, IQ_{93}^{91} = IV_{93}^{91}$$

d) Inversión de Factores al combinar los siguientes índices

$$\cdot_L IP_{93}^{91} \, x \, \cdot_P IQ_{93}^{91}$$

$$\cdot_P IP_{93}^{91} \, x \, \cdot_L IQ_{93}^{91}$$

SOLUCIONARIO

1) Índices de Precios y Cantidades para 1992 y 1993 con base 1991.

a) **Laspeyres.**

- Índices de Precios.

Las ponderaciones son las cantidades de 1991.

$$\bullet_L IP_{92}^{91} = \frac{\sum_1 P_{i92} Q_{i91}}{\sum_1^2 P_{i91} Q_{i91}} x100 = \frac{21'946,615}{167'629,140} x100 = 150.30$$

$$\bullet_L IP_{93}^{91} = \frac{\sum_1^2 P_{i93} Q_{i91}}{\sum_1^2 P_{i91} Q_{i91}} x100 = \frac{397'331,880}{167'629,140} x100 = 237.03$$

Tabla 6.9

ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS DE LASPEYRES, 1992-1993

Producto	P_{91} Q_{91}	P_{92} Q_{91}	P_{93} Q_{91}
Arroz cáscara	138408560	213629542	333808880
Trigo	29220580	38317073	63523000
Total	**167629140**	**251946615**	**397331880**

- Índices de Cantidad.

Las ponderaciones son los precios de 1991.

$$\bullet_L IP_{92}^{91} = \frac{\sum_1^2 P_{i92} Q_{i91}}{\sum_1^2 P_{i91} Q_{i91}} x100 = \frac{157'797,440}{167'629,140} x100 = 94.13$$

$$\bullet_L IP_{93}^{91} = \frac{\sum_1^2 P_{i93} Q_{i91}}{\sum_1^2 P_{i91} Q_{i91}} x100 = \frac{189'365,570}{167'629,140} x100 = 112.97$$

Tabla 6.10
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE CANTIDADES DE LASPEYRES, 1992-1993

Producto	Q_{91} P_{91}	Q_{92} P_{91}	Q_{93} P_{91}
Arroz cáscara	138408560	140993410	164496590
Trigo	29220580	16804030	24868980
Total	**167629140**	**157797440**	**189365570**

b) **Paasche.**

- Índices de Precios.

Las ponderaciones son las cantidades del período corriente.

$$\bullet_L IP_{92}^{91} = \frac{\sum_{1}^{2} P_{i93}Q_{i91}}{\sum_{1}^{2} P_{i91}Q_{i92}} x100 = \frac{239'654{,}379}{157'797{,}440} x100 = 151.87$$

$$\bullet_L IP_{93}^{91} = \frac{\sum_{1}^{2} P_{i93}Q_{i93}}{\sum_{1}^{2} P_{i91}Q_{i93}} x100 = \frac{450'790{,}070}{189'365{,}570} x100 = 238.05$$

Tabla 6.11
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS DE PAASCHE: 1992 Y 1993

Producto	P_{92} Q_{92}	P_{93} Q_{93}	P_{91} Q_{92}	P_{91} Q_{93}
Arroz cáscara	217619181	396727070	140993410	164496590
Trigo	22035198	54063000	16804030	24868980
Total	**239654379**	**450790070**	**157797440**	**189365570**

- Índices de Cantidad.

Las ponderaciones son los precios de período corriente.

$$\bullet_L IP_{92}^{91} = \frac{\sum_{1}^{2} P_{i92}Q_{i92}}{\sum_{1}^{2} P_{i91}Q_{i92}} x100 = \frac{239'654{,}379}{251'946{,}616} x100 = 95.12$$

$$\bullet_L IP_{93}^{91} = \frac{\sum_{1}^{2} P_{i93}Q_{i93}}{\sum_{1}^{2} P_{i91}Q_{i93}} x100 = \frac{450'790{,}070}{397'331{,}880} x100 = 113.45$$

Tabla 6.12
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE CANTIDAD DE PAASCHE, 1992 - 1993

Producto	Q_{92} P_{92}	Q_{93} P_{93}	Q_{91} P_{92}	Q_{91} P_{93}
Arroz cáscara	217619181	396727070	213629542	333808880
Trigo	22035198	54063000	38317074	63523000
Total	**239654379**	**450790070**	**251946616**	**397331880**

c) **Sidgwick-Drobisch.**

- Índices de Precios.
  Es el promedio aritmético de los Índices de Precios de Laspeyres y Paasche.

$$\bullet_{SD} IP_{92}^{91} = \frac{\bullet_L IP_{92}^{91} + \bullet_P IP_{92}^{91}}{2} = \frac{150.30 + 151.87}{2} = 151.09$$

$$\bullet_{SD} IP_{93}^{91} = \frac{\bullet_L IP_{93}^{91} + \bullet_P IP_{93}^{91}}{2} = \frac{237.03 + 238.05}{2} = 237.54$$

- Índices de Cantidad.

  Es el promedio aritmético de los Índices de Cantidades de Laspeyres y Paasche.

$$\bullet_{SD}\, IQ_{92}^{91} = \frac{\bullet_L IQ_{92}^{91} + \bullet_P IQ_{92}^{91}}{2} = \frac{94.13 + 95.12}{2} = 94.63$$

$$\bullet_{SD}\, IQ_{93}^{91} = \frac{\bullet_L IQ_{93}^{91} + \bullet_P IQ_{93}^{91}}{2} = \frac{112.97 + 113.45}{2} = 113.21$$

d) **Fisher.**

- Índices de Precio.

  Es el promedio geométrico de los Índices de Precios de Laspeyres y Paasche.

$$\bullet_F\, IP_{92}^{91} = \sqrt{\bullet_L IP_{92}^{91}\, x \bullet_P IP_{92}^{91}} = \sqrt{150.30x151.87} = 151.08$$

$$\bullet_F\, IP_{93}^{91} = \sqrt{\bullet_L IP_{93}^{91}\, x \bullet_P IP_{93}^{91}} = \sqrt{237.03x238.05} = 237.54$$

- Índices de Cantidad.

  Es el promedio geométrico de los Índices de Cantidades de Laspeyres y Paasche.

$$\bullet_F\, IQ_{92}^{91} = \sqrt{\bullet_L IQ_{92}^{91}\, x \bullet_P IQ_{92}^{91}} = \sqrt{94.13x95.12} = 94.62$$

$$\bullet_F\, IQ_{93}^{91} = \sqrt{\bullet_L IQ_{93}^{91}\, x \bullet_P IQ_{93}^{91}} = \sqrt{112.97x113.45} = 113.21$$

e) **Marshall-Edgeworth.**

- Índices de Precio.
  Este índice es ponderado por la semi-suma de las cantidades del período corriente "t" y del período base "o".

$$\bullet_M\, IP_{92}^{91} = \frac{\sum_1^2 P_{i92}(Q_{i91}+Q_{i92})}{\sum_1^2 P_{i91}(Q_{i91}+Q_{i92})} x100 = \frac{491'595{,}663}{325'426{,}580} x100 = 151.06$$

Tabla 6.13

ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS DE MARSHALL-EDGEWORTH, 1992

Producto	Ponderaciones	Numerador	Denominador
	$Q_{i91}+Q_{i92}$	**$P_{i92}(Q_{i91}+Q_{i92})$**	**$P_{i91}(Q_{i91}+Q_{i92})$**
Arroz cáscara	1643541	431243792	279401970
Trigo	200107	60351871	46024610
Total		**491595663**	**325426580**

$$\bullet_M\, IP_{93}^{91} = \frac{\sum_1^2 P_{i93}(Q_{i91}+Q_{i92})}{\sum_1^2 P_{i91}(Q_{i91}+Q_{i93})} x100 = \frac{848'121{,}950}{356'994{,}710} x100 = 151.06$$

Tabla 6.14

ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS DE MARSHALL-EDGEWORTH, 1993

Producto	Ponderaciones	Numerador	Denominador
	$Q_{i91}+Q_{i93}$	**$P_{i93}(Q_{i91}+Q_{i93})$**	**$P_{i91}(Q_{i91}+Q_{i93})$**
Arroz cáscara	1781795	730535950	302905150
Trigo	235172	117583000	54089560
Total		**848121950**	**356994710**

- Índices de Cantidad.

La ponderación de este índice es la semi-suma de los precios del período corriente "t" y del período base "o".

$$_{.M}IQ_{92}^{91} = \frac{\sum_{1}^{2} Q_{i92}\left(P_{i91}+P_{i92}\right)}{\sum_{1}^{2} Q_{i91}\left(P_{i91}+P_{i92}\right)} x100 = \frac{397'449{,}185}{419'573{,}059} x100 = 94.73$$

Tabla 6.15
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE CANTIDAD DE MARSHALL-EDGEWORTH, 1992

Producto	Ponderaciones	Numerador	Denominador
	$P_{i91}+P_{i92}$	$Q_{i92}(P_{i91}+P_{i92})$	$Q_{i91}(P_{i91}+P_{i92})$
Arroz cáscara	432.39	358610103	352035659
Trigo	531.60	38839081	67537400
Total		**397449185**	**419573059**

$$_{.M}IQ_{93}^{91} = \frac{\sum_{1}^{2} Q_{i93}\left(P_{i91}+P_{i93}\right)}{\sum_{1}^{2} Q_{i91}\left(P_{i91}+P_{i93}\right)} x100 = \frac{640'155{,}640}{564'961{,}020} x100 = 113.31$$

Tabla 6.16
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE CANTIDAD DE MARSHALL-EDGEWORTH, 1993

Producto	Ponderaciones	Numerador	Denominador
	$P_{i91}+P_{i93}$	$Q_{i93}(P_{i91}+P_{i93})$	$Q_{i91}(P_{i91}+P_{i93})$
Arroz cáscara	580	561223660	472217440
Trigo	730	78931980	92743580
Total		**640155640**	**564961020**

f) **Walsh.**

- Índices de Precio.

Las ponderaciones por producto de este Índices de Precios se obtienen con la raíz cuadrada de la productoria de las cantidades producidas en el período "t" y el período base "o".

$$_{.W}IP_{92}^{91} = \frac{\sum_{1}^{2} P_{i92} x \sqrt{Q_{i91} x Q_{i92}}}{\sum_{1}^{2} P_{i91} x \sqrt{Q_{i91} x Q_{i92}}} x100 = \frac{244'672{,}393}{161'854{,}057} x100 = 151.17$$

Tabla 6.17
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS DE WALSH, 1992

Producto	Ponderaciones	Numerador	Denominador
	$(Q_{i91\,x}Q_{i92})^{1/2}$	$P_{i92}(Q_{i91}Q_{i92})^{1/2}$	$P_{i91}(Q_{i91}Q_{i92})^{1/2}$
Arroz cáscara	821735	215615134	139695007
Trigo	96344	29057259	22159050
Total		**244672393**	**161854057**

$$_{.W}IP_{93}^{91} = \frac{\sum_{1}^{2} P_{i93} x \sqrt{Q_{i91} x Q_{i93}}}{\sum_{1}^{2} P_{i91} x \sqrt{Q_{i91} x Q_{i93}}} x100 = \frac{422'513{,}152}{177'846{,}929} x100 = 237.57$$

Tabla 6.18
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS DE WALSH, 1993

Producto	Ponderaciones $(Q_{i91} \times Q_{i93})^{1/2}$	Numerador $P_{i93}(Q_{i91}Q_{i93})^{1/2}$	Denominador $P_{i91}(Q_{i91}Q_{i93})^{1/2}$
Arroz cáscara	887587	363910729	150889815
Trigo	117205	58602423	26957114
Total		**422513152**	**177846929**

- Índices de Cantidades.

Las ponderaciones por producto del Índice de Cantidades se obtienen con la raíz cuadrada de la productoria de los precios del año base y el año corriente.

$$_{.W}IQ_{92}^{91} = \frac{\sum_{1}^{2} Q_{i92} \times \sqrt{P_{i91} x P_{i92}}}{\sum_{1}^{2} Q_{i91} \times \sqrt{P_{i91} x P_{i92}}} \times 100 = \frac{194'407{,}930}{205'415{,}067} \times 100 = 94.64$$

Tabla 6.19
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE CANTIDAD DE WALSH, 1992

Producto	Ponderaciones $(P_{i91} x P_{i92})^{1/2}$	Numerador $Q_{i92}(P_{i91} x P_{i92})^{1/2}$	Denominador $Q_{i91}(P_{i91} x P_{i92})^{1/2}$
Arroz cáscara	211.20	175165266	171953939
Trigo	263.38	19242664	33461128
Total		**194407930**	**205415067**

$$_{.W}IQ_{93}^{91} = \frac{\sum_{1}^{2} Q_{i93} \times \sqrt{P_{i91} \times P_{i93}}}{\sum_{1}^{2} Q_{i91} \times \sqrt{P_{i91} \times P_{i93}}} \times 100 = \frac{292'128{,}169}{258'029{,}915} \times 100 = 113.21$$

Tabla 6.20
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE CANTIDAD DE WALSH, 1993

Producto	Ponderaciones $(P_{i91} x P_{i93})^{1/2}$	Numerador $Q_{i93}(P_{i91} x P_{i93})^{1/2}$	Denominador $Q_{i91}(P_{i91} x P_{i93})^{1/2}$
Arroz cáscara	264.00	255460858	214946520
Trigo	339.12	36667311	43083395
Total		**292128169**	**258029915**

g) **Keynes.**

- Índices de Precio.

Las ponderaciones del Índices de Precios se obtienen tomando el menor de las cantidades del año corriente y base.

$$_{.K}IP_{92}^{91} = \frac{\sum_{1}^{2} P_{i92} \times Min(Q_{i91}, Q_{i92})}{\sum_{1}^{2} P_{i91} \times Min(Q_{i91}, Q_{i92})} \times 100 = \frac{235'664{,}739}{155'212{,}590} \times 100 = 151.83$$

Tabla 6.21
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS DE KEYNES, 1992

Producto	Ponderaciones $Min(Q_{i91},Q_{i92})$	Numerador $P_{i92}Min(Q_{i91},Q_{i92})$	Denominador $P_{i91}Min(Q_{i91},Q_{i92})$
Arroz cáscara	814168	213629542	138408560
Trigo	73061	22035197	16804030
Total		**235664739**	**155212590**

$$_{.K}IP_{93}^{91} = \frac{\sum_{1}^{2} P_{i93} \times Min(Q_{i91}, Q_{i93})}{\sum_{1}^{2} P_{i91} \times Min(Q_{i91}, Q_{i93})} \times 100 = \frac{387'871{,}880}{163'277{,}540} \times 100 = 237.55$$

Tabla 6.22
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS DE KEYNES, 1993

Producto	Ponderaciones	Numerador	Denominador
	$Min(Q_{i91},Q_{i93})$	$P_{i93}Min(Q_{i91},Q_{i93})$	$P_{i91}Min(Q_{i91},Q_{i93})$
Arroz cáscara	814168	333808880	138408560
Trigo	108126	54063000	24868980
Total		**387871880**	**163277540**

- Índices de Cantidades.

Las ponderaciones del Índice de Cantidades se obtienen considerando el menor de los precios del año base y del año corriente.

$$_{.K}IQ_{92}^{91} = \frac{\sum_{1}^{2} Q_{i92} \times Min(P_{i91},P_{i92})}{\sum_{1}^{2} Q_{i91} \times Min(P_{i91},P_{i92})} \times 100 = \frac{157'797,440}{167'629,140} \times 100 = 94.13$$

Tabla 6.23
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE CANTIDAD DE KEYNES, 1992

Producto	Ponderaciones	Numerador	Denominador
	$Min(P_{i91},P_{i92})$	$Q_{i92}Min(P_{i91},P_{i92})$	$Q_{i91}Min(P_{i91},P_{i92})$
Arroz cáscara	170	140993410	138408560
Trigo	230	16804030	29220580
Total		**157797440**	**167629140**

$$_{.K}IQ_{93}^{91} = \frac{\sum_{1}^{2} Q_{i93} \times Min(P_{i91},P_{i93})}{\sum_{1}^{2} Q_{i91} \times Min(P_{i91},P_{i93})} \times 100 = \frac{189'365,570}{167'629,140} \times 100 = 112.97$$

Tabla 6.24
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE CANTIDAD DE KEYNES, 1993

Producto	Ponderaciones	Numerador	Denominador
	$Min(P_{i91},P_{i93})$	$Q_{i93}Min(P_{i91},P_{i93})$	$Q_{i91}Min(P_{i91},P_{i93})$
Arroz cáscara	170	164496590	138408560
Trigo	230	24868980	29220580
Total		**189365570**	**167629140**

2) Índices Geométricos de Precios y Cantidad para el año 1992 y 1993 con base en 1991.

Tabla 6.25
PONDERACIONES PARA LOS ÍNDICES GEOMÉTRICOS

Producto	$P_{91}Q_{91}$	Ponderación	Ponderación %
Arroz cáscara	138408560	0.8257	82.57
Trigo	29220580	0.1743	17.43
Total	**167629140**	**1.0000**	**100.00**

a) **Índices de Precios.**

$$_{.G}IP_{92}^{91} = \prod_{1}^{2} \left(\frac{P_{i92}}{P_{i91}}\right)^{\alpha_i} x100 = (1.4310x1.0484)x100 = 150.0$$

Tabla 6.26
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS GEOMÉTRICO: 1992

Producto	P_{i92}/P_{i91}	Ponderación	$(P_{i92}/P_{i91})^i$
Arroz cáscara	1.5435	0.8257	1.4310
Trigo	1.3113	0.1743	1.0484
Productoria			**1.5000**

$$_{.G}IP_{93}^{91} = \prod_{1}^{2} (\frac{P_{i93}}{P_{i91}})^{\alpha_i} x100 = (2.0687x1.1449)x100 = 236.85$$

Tabla 6.27
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS GEOMÉTRICO, 1993

Producto	P_{i93}/P_{i91}	Ponderación	$(P_{i93}/P_{i91})^{i}$
Arroz cáscara	2.4118	0.8257	2.0687
Trigo	2.1739	0.1743	1.1449
Productoria			**2.3685**

b) **Índice de Cantidades**

$$_{.G}IQ_{92}^{91} = \prod_{1}^{2} \left(\frac{Q_{i92}}{Q_{i91}}\right)^{\alpha_i} \times 100 = (1.015 \times 0.9081) \times 100 = 92.21$$

Tabla 6.28
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE CANTIDAD GEOMÉTRICO, 1992

Producto	Q_{i92}/Q_{i91}	Ponderación	$(Q_{i92}/Q_{i91})^{i}$
Arroz cáscara	1.0187	0.8257	1.0154
Trigo	0.5751	0.1743	0.9081
Productoria			**0.9221**

$$_{.G}IQ_{93}^{91} = \prod_{1}^{2} \left(\frac{Q_{i93}}{Q_{i91}}\right)^{\alpha_i} \times 100 = (1.1532 \times 0.9723) \times 100 = 112.13$$

Tabla 6.29
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE CANTIDADES GEOMÉTRICO, 1993

Producto	Q_{i93}/Q_{i91}	Ponderación	$(Q_{i93}/Q_{i91})^{i}$
Arroz cáscara	1.1885	0.8257	1.1532
Trigo	0.8511	0.1743	0.9723
Productoria			**1.1213**

3) Índices de Tournqvist-Theil de Precios y Cantidad para los años 1992 y 1993 con base en 1991.

Obtención de los valores corrientes en los años 1991, 1992 y 1993.

Tabla 6.30
VALORES CORRIENTES, 1991-1993

Producto	$P_{91}Q_{91}$	$P_{92}Q_{92}$	$P_{93}Q_{93}$
Arroz cáscara	138408560	217619182	396727070
Trigo	29220580	22035198	54063000
Total	**167629140**	**239654380**	**450790070**

La importancia de cada producto en el total por cada año se obtiene en base a la participación relativa de cada uno de los valores de producción.

Tabla 6.31
COMPOSICIÓN % DE LOS PRODUCTOS AGRÍCOLAS

Producto	Composición Porcentual		
	$P_{91}Q_{91}$	$P_{92}Q_{92}$	$P_{93}Q_{93}$
Arroz cáscara	82.57	90.81	88.01
Trigo	17.43	9.19	11.99
Total	**100.00**	**100.00**	**100.00**

a) **Índices de Precios.**

$$_{\cdot T}IP_{92}^{91} = \prod_{1}^{2}\left(\frac{P_{i92}}{P_{i91}}\right)^{\frac{\alpha_{i92}+\alpha_{i91}}{2}} x100 = (1.4568x1.0367)x100 = 151.03$$

donde las ponderaciones para el índice de 1992 se han obtenido de la siguiente manera:

Tabla 6.32

PONDERACIONES DE LOS PRODUCTOS AGRÍCOLAS, 1992

Producto	Ponderación ((αi91+αi92)/2)	
Arroz cáscara	(82.57+90.81)/2 =	86.69
Trigo	(17.43+ 9.19)/2 =	13.31
Total		**100.00**

Tabla 6.33

ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS DE TOURNQVIST, 1992

Producto	P_{i92}/P_{i91}	Ponderación $(\alpha_{i91}+\alpha_{i92})/2$	$(P_{i92}/P_{i91})^{(\alpha_{i91}+\alpha_{i92})/2}$
Arroz cáscara	1.5435	0.8669	1.4568
Trigo	1.3113	0.1331	1.0367
Productoria			1.5103

$$_{\cdot T}IP_{93}^{91} = \prod_{1}^{2}\left(\frac{P_{i93}}{P_{i91}}\right)^{\frac{\alpha_{i91}+\alpha_{i93}}{2}} x100 = (2.1188x1.1210)x100 = 237.52$$

donde las ponderaciones para el índice de 1993 se han obtenido de la siguiente manera:

Tabla 6.34

PONDERACIONES DE LOS PRODUCTOS AGRÍCOLAS, 1993

Producto	Ponderación ($(\alpha_{i91}+\alpha_{i93})/2$)	
Arroz cáscara	(82.57+88.01)/2 =	85.29
Trigo	(17.43+11.99)/2 =	14.71
Total		**100.00**

Tabla 6.35

ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS DE TOURNQVIST, 1993

Producto	P_{i93}/P_{i91}	Ponderación $(\alpha_{i91}+\alpha_{i93})/2$	$(P_{i93}/P_{i91})^{(\alpha_{i91}+\alpha_{i93})/2}$
Arroz cáscara	2.4118	0.8529	2.1188
Trigo	2.1739	0.1471	1.1210
Productoria			**2.3752**

b) **Índice de Cantidades**

$$_{\cdot T}IQ_{92}^{91} = \prod_{1}^{2}\left(\frac{Q_{i92}}{Q_{i91}}\right)^{\frac{\alpha_{i91}+\alpha_{i92}}{2}} x100 = (1.0162x0.9290)x100 = 94.40$$

Tabla 6.36

ANEXO PARA EL ÍNDICE DE CANTIDAD DE TOURNQVIST, 1992

Producto	Q_{i92}/Q_{i91}	Ponderación $(\alpha_{i91}+\alpha_{i92})/2$	$(Q_{i92}/Q_{i91})^{(\alpha_{i91}+\alpha_{i92})/2}$
Arroz cáscara	1.0187	0.8669	1.0162
Trigo	0.5751	0.1331	0.9290
Productoria			**0.9440**

$$._{T}IQ^{91}_{93} = \prod_{1}^{2}\left(\frac{Q_{i93}}{Q_{i91}}\right)^{\frac{\alpha_{i91}+\alpha_{i93}}{2}} x100 = (1.1587x0.9766)x100 = 113.15$$

Tabla 6.37
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE CANTIDAD DE TOURNQVIST, 1993

Producto	Q_{i93}/Q_{i91}	Ponderación $(\alpha_{i91}+\alpha_{i93})/2$	$(Q_{i93}/Q_{i91})^{(\alpha_{i91}+\alpha_{i93})/2}$
Arroz cáscara	1.1885	0.8529	1.1587
Trigo	0.8511	0.1471	0.9766
Productoria			**1.1315**

4) Propiedades de Reversibilidad Temporal circularidad e Inversión de Factores para los Índices de Laspeyres, Paasche, Fisher, Geométrico y de Tournqvist-Theil. (Cálculos previos).

Se obtienen previamente los Índices de 1991 y 1993 con base en 1992 para cada uno de los anteriores autores. Se probará sólo para Índices de Precios.

<u>Índices de Precios de 1991 con Base 1992</u>:

- Índices de Precios Laspeyres.

$$._{L}IP^{92}_{91} = \frac{\sum P_{i91}\,Q_{i92}}{\sum P_{i92}\,Q_{i92}}x100 = \frac{157'797,440}{239'654,379}x100 = 65.84$$

Tabla 6.38
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS LASPEYRES, 1991

Producto	$P_{i91}Q_{i92}$	$P_{i92}Q_{i92}$
Arroz cáscara	140993410	217619181
Trigo	16804030	22035198
Total	**157797440**	**239654379**

- Índices de Precios Paasche.

$$._{P}IP^{92}_{91} = \frac{\sum P_{i91}Q_{i91}}{\sum P_{i92}Q_{i91}}\times 100 = \frac{167'629,140}{251'946,616}\times 100 = 66.53$$

Tabla 6.39
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS PAASCHE, 1991

Producto	$P_{i92}Q_{i91}$	$P_{i91}Q_{i91}$
Arroz cáscara	213629542	138408560
Trigo	38317074	29220580
Total	**251946616**	**167629140**

- Índices de Precios Fisher.

$$._{F}IP^{92}_{91} = \sqrt{._{L}IP^{92}_{91}\,x\,._{P}IP^{92}_{91}} = \sqrt{65.84x66.53} = 66.19$$

- Índices de Precios Geométrico.

$$._{G}IP^{92}_{91} = \Pi\left(\frac{P_{i91}}{P_{i92}}\right)^{\alpha_i} x100 = (0.6479)^{0.9081}x(0.7626)^{0.0919}x100 = 65.76$$

Tabla 6.40
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS GEOMÉTRICO, 1991

Producto	P_{i91}/P_{i92}	Ponderación α_{i92}	$(P_{i91}/P_{i92})^{\alpha_{i92}}$
Arroz cáscara	0.6479	0.9081	0.6742
Trigo	0.7626	0.0919	0.9754
Productoria			**0.6576**

- Índices de Precios Tournqvist-Theil

$$._T\, IP_{91}^{92} = \Pi\left(\frac{P_{i91}}{P_{i92}}\right)^{\frac{\alpha_{i92}+\alpha_{i91}}{2}} = 0.6479^{0.8669}\, x 0.7626^{0.1331} = 66.2101$$

Tabla 6.41
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS TOURNQVIST-THEIL, 1991

Producto	P_{i91}/P_{i92}	Ponderación $(\alpha_{i92}+\alpha_{i91})/2$	$(P_{i91}/P_{i92})^{(\alpha_{i92}+\alpha_{i91})/2}$
Arroz cáscara	0.6479	0.8667	0.6864
Trigo	0.7626	0.1331	0.9646
Productoria			**0.6621**

<u>Índices de Precios de 1993 con Base 1992</u>:

- Índices de Precios Laspeyres.

$$._L\, IP_{93}^{92} = \frac{\sum P_{i93}\, Q_{i92}}{\sum P_{i92}\, Q_{i92}}\, x100 = \frac{376’573,430}{239’654,379}\, x100 = 157.13$$

Tabla 6.42
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS LASPEYRES, 1993

Producto	$P_{i93}Q_{i\,92}$	$P_{i92}Q_{i\,92}$
Arroz cáscara	340042930	217619181
Trigo	36530500	22035198
Total	**376573430**	**239654379**

- Índices de Precios Paasche.

$$._P\, IP_{93}^{92} = \frac{\sum P_{i93}\, Q_{i93}}{\sum P_{i92}\, Q_{i93}}\, x100 = \frac{450’790,070}{286’506,451}\, x100 = 157.34$$

Información adicional para calcular los Índices de Precios de Laspeyres y Paasche:

Tabla 6.43
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS PAASCHE, 1993

Producto	$P_{i93}Q_{i\,93}$	$P_{i92}Q_{i93}$
Arroz cáscara	396727070	253895649
Trigo	54063000	32610802
Total	**450790070**	**286506451**

- Índices de Precios Fisher.

$$._F\, IP_{93}^{92} = \sqrt{._L\, IP_{93}^{92}\, x\, ._P IP_{93}^{92}} = \sqrt{157.13 x 157.34} = 157.24$$

- Índices de Precios Geométrico.

$$._G\, IP_{93}^{92} = \Pi\left(\frac{P_{i93}}{P_{i92}}\right)^{\alpha_i} x100 = (1.562\,)^{0.908}\, x(1.657\,)^{0.091}\, x100 = 157.11$$

Tabla 6.44
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS GEOMÉTRICO, 1993

Producto	P_{i93}/P_{i92}	Ponderación α_{i92}	$(P_{i93}/P_{i92})^{\alpha_{i92}}$
Arroz cáscara	1.5626	0.9081	1.4998
Trigo	1.6578	0.0919	1.0476
Productoria			**1.5711**

- Índices de Precios de Tournqvist-Theil.

$$._T IP_{93}^{92} = \Pi\left(\frac{P_{i93}}{P_{i92}}\right)^{\frac{\alpha_{i92}+\alpha_{i93}}{2}} x100 = (1.562)^{0.894} x (1.657)^{0.105} x100 = 157.24$$

Tabla 6.45
ANEXO PARA EL ÍNDICE DE PRECIOS DE TOURNQVIST-THEIL, 1993

Producto	P_{i93}/P_{i92}	Ponderación $(\alpha_{i92}+\alpha_{i93})/2$	$(P_{i93}/P_{i92})^{(\alpha_{i92}+\alpha_{i93})/2}$
Arroz cáscara	1.5626	0.8941	1.49044
Trigo	1.6578	0.1059	1.05499
Productoria			**1.57240**

Verificamos las propiedades:

a) **Reversibilidad Temporal.**

$$\boxed{IP_t^o \; x \; IP_o^t = 1}$$

- Laspeyres.

$$._L IP_{92}^{91} \, x \, ._L IP_{91}^{92} = 1.502984x0.658444 = 0.9896$$

- Paasche.

$$._P IP_{92}^{91} \, x \, ._P IP_{91}^{92} = 1.518730x0.665343 = 1.0105$$

- Fisher.

$$._F IP_{92}^{91} \, x \, ._F IP_{91}^{92} = 1.510836x0.661884 = 0.9999 \approx 1$$

- Geométrica.

$$._G IP_{92}^{91} \, x \, ._G IP_{91}^{92} = 1.5002x0.657678 = 0.9866$$

- Tournqvist-Theil.

$$._T IP_{92}^{91} \, x \, ._T IP_{91}^{92} = 1.5103x0.662109 = 0.9999 \approx 1$$

b) **Circularidad.**

$$\boxed{IP_1^o \; x \; IP_2^1 = IP_2^o}$$

- Laspeyres.

$$._L IP_{92}^{91} x ._L IP_{93}^{92} = 1.502984x1.571336 = 2.3617 \neq 2.3703 = ._L IP_{93}^{91}$$

- Paasche.

$$._P IP_{92}^{91} x ._P IP_{93}^{92} = 1.518730x1.573419 = 2.3895 \neq 2.3805 = ._P IP_{93}^{91}$$

- Fisher.

$$._F IP_{92}^{91} x ._P IP_{93}^{92} = 1.510836x1.572377 = 2.3756 \approx 2.3754 = ._F IP_{93}^{91}$$

- Geométrica.

$$._G IP^{91}_{92} x ._P IP^{92}_{93} = 1.5002x1.571115 = 2.3569 \neq 2.3685 = ._G IP^{91}_{93}$$

- Tournqvist-Theil.

$$._T IP^{91}_{92} x ._T IP^{92}_{93} = 1.5103x1.572417 = 2.3748 \approx 2.3750 = ._T IP^{91}_{93}$$

c) **Inversión de Factores.**

$$\boxed{IV^o_t = IP^o_t \, x \, IQ^o_t}$$

(IV_{93}^{91}= 2.6892)

- Laspeyres.

$$._L IP^{91}_{93} x ._L IQ^{91}_{93} = 2.370303x1.129670 = 2.6776 \neq IV^{91}_{93}$$

- Paasche.

$$._P IP^{91}_{93} x ._P IQ^{91}_{93} = 2.380528x1.134543 = 2.7008 \neq IV^{91}_{93}$$

- Fisher.

$$._F IP^{91}_{93} x ._F IQ^{91}_{93} = 2.375410x1.132104 = 2.6892 = IV^{91}_{93}$$

- Geométrica.

$$._G I \;^{91}_{93} x ._G I \;^{91}_{93} = 2.3685x1. \;\; 213 = 2.6782 \neq I \;^{91}_{93}$$

- Tournqvist-Theil.

$$._T IP^{91}_{93} x ._T IQ^{91}_{93} = 2.3752x1.1315 = 2.6875 \approx IV^{91}_{93}$$

d) **Inversión de Factores al Combinar índices.**

$$._L IP^{91}_{93} \;\; x \;\; ._P IQ^{91}_{93} \;\; = \;\; IV^{91}_{93}$$

2.3703 x 1.1345 = 2.68910535 ≅ 2.6892 = IV_{93}^{91}

$$._P IP^{91}_{93} \;\; x \;\; ._L IQ^{91}_{93} \;\; = \;\; IV^{91}_{93}$$

2.3805 x 1.1297 = 2.68925085 ≅ 2.6892 = IV_{93}^{91}

EJERCICIOS PROPUESTOS

En base a la siguiente tabla:

1. Para los años 1998 y 1999 realizar los siguientes índices y comentar:

a) Precios de Laspeyres por Cantidades de Paasche.
b) Precios de Paasche por cantidades de Laspeyres.

2. ¿Cómo se obtiene el Valor Bruto de la Producción a precios constantes de 1989?

3. Verificar la consistencia al aplicar los Índices de precios deflactando los valores corrientes con índices de Laspeyres, Paasche y Fisher. Comentar.

4. Verificar la consistencia de los Índices de cantidad, extrapolando el valor de producción del periodo base por Índices de Laspeyres y Paasche. Comentar.

Tabla 6.46
PRODUCCIÓN Y PRECIOS DE FRUTAS EN EL PERÚ
(En miles de Toneladas Métricas y Nuevos Soles x Kg.)

Principales Frutas	Miles de TM			Precios (S/: x Kg.)		
	1994	1998	1999	1994	1998	1999
Limón	223.7	208.5	226.9	0.51	0.333	0.70
Mandarina	73.1	89.5	116.8	0.48	0.55	0.57
Mango	147.6	137.6	191.5	0.70	0.38	0.58
Manzana	104.3	126.8	150.0	0.42	0.66	1.00
Naranja	204.2	233.8	257.4	0.42	0.34	0.45
Papaya	119.2	165.0	171.0	0.38	0.36	0.39
Plátano	845.4	1321.9	1385.0	0.35	0.29	0.29

Fuente: Ministerio de Agricultura- Oficina de Información Agraria